1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x^2y^2 + y^2 = 6x^2 + 12$ egyenletet!

2. Milyen kapcsolat van a p és q paraméterek között, ha az $x^4 + px^2 + q = 0$ egyenlet gyökeire igaz a következő összefüggés:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}$$

3. Az O középpontú körvonal két pontja A és B, továbbá $AOB\sphericalangle=60°$. A rövidebb AB ív tetszőleges belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az $OBMA$ négyszög középvonalai egymásra merőlegesek.

4. Határozzuk meg azokat a nem palindrom négyjegyű számokat, amelyekből ha kivonjuk az első kettő és az utolsó kettő számjegyükből álló számok szorzatát, ugyanazt az eredményt kapjuk, minta ezt azzal a négyjegyű számmal tennénk meg, amelyet az eredeti négyjegyű szám számjegyeinek tükrözésével kapunk.

5. Definiáljuk az $\{a_n\}$ sorozatot az alábbi módon:
$a_1 = \frac{1}{2}$
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$ ha $1 < n$
Határozza meg a_{2014} pontos értékét!

6. Egy egyenlő szárú háromszög köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága úgy aránylik a szártól mért távolsághoz, mint $1{:}\,\sqrt{10}$. Határozza meg az alap és a szár arányát!

7. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számpárok halmazán!

$$x + y^2 = y + x^2 + y^3$$

8. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$$

9. Egy $\sqrt{3}$ egység átfogójú derékszögű háromszög súlypontja a háromszög beírt körén van. Mekkora a háromszög kerülete?

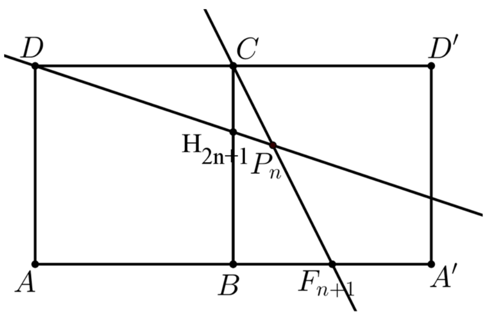
10. Legyen H azon rendezett $(p\,;\,q\,;\,r)$ számhármasok halmaza, hogy p, q, r mind pozitív prímek, valamint a $px^2 + qx + r = 0$ egyenlet gyökei racionális számok.
Mely prímek jelennek meg legalább 7 különböző H-beli számhármasban?

11. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert! (a, b, c pozitív számok!)

$I.\quad \frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} = 1$

$II.\quad a + b + c = 3$

12. Adott az $ABCD$ négyzet. Ennek BC oldalára tükrözve A-t, és B-t adódik az $A'D'CB$ négyzet. Tekintsük a BC oldal C-hez legközelebbi $2n$+1-edelő pontját (n pozitív egész!), ezt jelöljük H_{2n+1}-gyel, valamint a BA' oldal A'-höz legközelebbi n+1-edelőpontját, ezt pedig jelöljük F_{n+1}-gyel. A D-n, és H_{2n+1}-en átmenő egyenes metszéspontja a C-n, és F_{n+1}-en átmenő egyenessel legyen P_n. Bizonyítsuk be, hogy a P_n pontok mind egy körön helyezkednek el!



13. Legyen R a háromszög köré, r a háromszögbe írt kör sugara, d_a, d_b, d_c a köré írt kör középpontjának az oldalaktól mért távolsága. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög hegyesszögű, akkor

$$d_a + d_b + d_c = R + r$$

14. Oldjuk meg az $[x^2] = 20x + 13$ egyenletet a valós számok halmazán!

15. Bizonyítsa be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet $(a, b \neq 0)$ gyökei kielégítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|x| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|}$$

16. Az ABC háromszög csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre T_a, T_b, T_c. Az AT_bT_c háromszög magasságpontja A', a BT_aT_c háromszög magasságpontja B' és a CT_aT_b háromszögé C'. Bizonyítsuk be, hogy $A'B'C'$ egybevágó $T_aT_bT_c$ háromszöggel!

17. Melyik az a háromjegyű szám, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

(1) Ha az első két számjegyét elhagyjuk, az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.

(2) Ha az első két számjegyét átírjuk az utolsó kettő mögé, olyan számot kapunk, amely 1881-gyel nagyobb az eredeti számnál.

18. Adjuk meg azokat a hatjegyű természetes számokat, amelyeknek az első három számjegyét elhagyva az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.